

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой



Шабров С.А.
04.03.2025г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.О.16 Математический анализ

1. **Шифр и наименование специальности:** 30.05.02 Медицинская биофизика
2. **Специализация:** Медицинская биофизика
3. **Квалификация выпускника:** Врач-биофизик
4. **Форма обучения:** очная
5. **Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** математического анализа
математического факультета
6. **Составители программы:** Давыдова Майя Борисовна, доцент, кандидат
физико-математических наук
7. **Рекомендована:** научно-методическим советом МБФ, протокол от 04.03.2025г., № 2
8. **Учебный год:** 2025/2026 **Семестры:** 1, 2

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Цель изучения данной дисциплины:

- способствовать овладению студентами математическим аппаратом, необходимым для решения теоретических и практических задач, развитие у студентов способности самостоятельного изучения математической литературы и умения выражать математическим языком естественнонаучные и клинические задачи;
- способствовать формированию у студентов-кибернетиков системных знаний, умений и навыков по применению математического аппарата для решения научных, производственных и учебных задач.

Задачи изучения дисциплины:

- приобретение студентами методологической направленности, существенной для решения проблем доказательной медицины;
- формирование у студентов логического мышления, умения точно формулировать задачу, способность вычленять главное и второстепенное, умения делать выводы на основании полученных результатов измерений;
- обучение студентов методам математического анализа, которые применяются в медицине для моделирования процессов и позволяют извлекать необходимую информацию из результатов наблюдений и измерений, оценивать степень надежности полученных данных;
- формирование навыков изучения научной литературы.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Учебная дисциплина «Математический анализ» относится к базовой части Блока 1 «Дисциплины (модули)» Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по специальности 30.05.02 Медицинская биофизика (специалист).

Учебная дисциплина «Математический анализ» является предшествующей для следующих дисциплин: «Теория вероятностей и математическая статистика», «Информатика, медицинская информатика», «Оптика и атомная физика», «Физическая химия», «Медицинская электроника».

Знания, навыки и умения, полученные при освоении данной дисциплины необходимы обучающемуся для осуществления медицинской и научно-исследовательской деятельности.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен использовать и применять фундаментальные и прикладные медицинские, естественнонаучные знания для постановки и решения стандартных и инновационных задач профессиональной деятельности	ОПК-1.2	Использует основные естественнонаучные понятия и методы исследований при решении профессиональных задач	знать: основные термины и инструменты математического анализа, методы самоконтроля и приобретения новых навыков уметь: абстрактно мыслить, анализировать, самостоятельно применять методы и средства познания, обучения и самоконтроля для приобретения новых знаний и умений, в том числе в новых областях, непосредственно не связанных со сферой деятельности, развития социальных и профессиональных компетенций, изменения вида своей профессиональной деятельности владеть (иметь навык(и)): приемами применения основных математических понятий и методов при решении профессиональных задач

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час (в соответствии с учебным планом) —

6 ЗЕТ / 216 часов.

Форма промежуточной аттестации (зачет/экзамен) — зачет (1 семестр), экзамен (2 семестр).**13. Виды учебной работы**

Вид учебной работы	Трудоемкость		
	Всего	По семестрам	
		1 семестр	2 семестр
Аудиторные занятия	96	48	48
в том числе: лекции	32	16	16
практические	64	32	32
ГК	26	18	8
Самостоятельная работа	58	42	16
Контроль	36		36
Итого:	216	108	108

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
1. Лекции		
1.1	Введение в математический анализ	Предел переменной величины. Определение предела на языке последовательностей. Арифметические действия над пределами. Определение функции. Понятие сложной функции. Классификация элементарных функций (целые рациональные, дробно-рациональные, иррациональные, трансцендентные). Определение предела функции. Бесконечно малая и большая функции. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва и их классификация. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
1.2	Дифференциальное исчисление функции одного переменного	Понятие производной. Геометрический и физический смысл производной. Дифференцируемость функций. Основные правила дифференцирования. Производные сложной функции, обратной функции. Понятие дифференциала. Приближенные вычисления с помощью дифференциала. Производные высших порядков различных функций. Дифференциалы высших порядков. Правило Лопиталя. Исследование функций методами анализа. Интервалы монотонного изменения функции. Экстремум функции. Исследование функции на экстремум с помощью производной второго порядка. Участки выпуклости графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования графика функции.
1.3	Интегральное исчисление функции одного переменного	Неопределенный интеграл (определение неопределенного интеграла, его свойства, таблица неопределенных интегралов). Метод интегрирования, основанный на инвариантности формы неопределенного интеграла (метод замены переменной). Интегрирование по частям. Интегрирование дробно-рациональных выражений (интегрирование дробей простейшего вида, понятие неправильной дроби, разложение правильной дроби на сумму простейших дробей). Интегрирование тригонометрических выражений. Определенный интеграл (определение на основе геометрической задачи о площади криволинейной трапеции), его свойства. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула

		Ньютона – Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Геометрические и физические задачи с использованием определенного интеграла (вычисление площади плоской фигуры, вычисление работы переменной силы). Несобственные интегралы (от неограниченных функций, с бесконечными пределами).
1.4	Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных	Функции нескольких переменных (определение, область определения). Предел функции нескольких переменных, способы вычисления. Непрерывность функции. Определение частных производных, их геометрический смысл. Полный дифференциал как сумма частных дифференциалов, приложение полного дифференциала. Производные высших порядков (обозначение, понятийный смысл, доказательство теоремы о смешанных производных). Дифференциалы высших порядков.
1.5	Интегральное исчисление функции нескольких переменных	Интегрирование функций двух переменных. Определение двойного интеграла, его геометрический смысл, свойства. Вычисление двойного интеграла для прямоугольной и криволинейной областей. Замена переменной в двойном интеграле. Приложение двойного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и физических величин.
1.6	Линейная алгебра. Векторная алгебра	Матрицы. Основные понятия и определения, основные виды матриц. Операции над матрицами. Определители 2, 3, n-го порядков и их свойства. Обратная матрица. Теорема существования и единственности обратной матрицы. Нахождение обратной матрицы. Решение матричных уравнений. Формулы Крамера. Системы линейных алгебраических уравнений, основные понятия и определения. Совместность систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера – Капелли. Методы нахождения решения системы линейных алгебраических уравнений (метод Крамера, метод Гаусса, матричный метод). Однородные системы линейных алгебраических уравнений. Основные понятия и определения. Фундаментальная система решений. Определение вектора как элемента линейного пространства. Линейные операции над векторами. Скалярное, векторное, смешанное и двойное векторное произведения векторов, их основные свойства, геометрический и физический смысл. Координатное выражение произведений векторов.
1.7	Аналитическая геометрия	Общие понятия о линии, поверхности. Уравнения линий и поверхностей. Полярные координаты. Прямая на плоскости. Различные формы уравнений прямой на плоскости. Взаимное положение прямых на плоскости. Прямая и плоскость в пространстве. Уравнения плоскости и уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Геометрические определения кривых второго порядка (эллипс, гипербола, парабола). Вывод канонических уравнений этих кривых, построение кривых второго порядка по их каноническому уравнению. Преобразование декартовых координат на плоскости. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду. Поверхности второго порядка (эллипсоид, параболоиды, гиперболоиды, цилиндр, конус), их канонические уравнения. Метод сечений в исследовании формы поверхностей. Приведение общего уравнения кривой и поверхности второго порядка к каноническому виду.
1.8	Обыкновенные дифференциальные уравнения	Общие понятия теории дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения I порядка, разрешенные относительно производной. Частное и общее решение дифференциального уравнения первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Решение простейших дифференциальных уравнений первого порядка, приводящихся к уравнениям с разделяющимися переменными. Простейшие дифференциальные уравнения высших порядков. Решение простейших дифференциальных уравнений высших порядков. Частное и общее решение дифференциальных уравнений высших порядков. Нахождение произвольных постоянных общего

		решения с использованием начальных условий. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами. Использование дифференциальных уравнений в прикладных задачах.
1.9	Уравнения в частных производных	Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка. Линейные однородные уравнения. Квазилинейные уравнения. Нелинейные уравнения. Уравнение переноса вещества потоком воздуха. Основные уравнения математической физики и постановка начально-краевых задач. Понятие корректно поставленной задачи. Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны. Постановка задач Коши. Классификация граничных условий. Смешанная задача для волнового уравнения. Примеры задач, сводящиеся к решению волнового уравнения. Вывод уравнения диффузии. Вывод уравнения теплопроводности. Постановка задачи Коши. Виды граничных условий. Смешанная задача. Математические модели стационарных процессов.
1.10	Математическое моделирование и обработка результатов измерения	Основы математического моделирования. Теория погрешностей. Метод наименьших квадратов.
2. Лабораторные занятия		
2.1	Введение в математический анализ	Вычисление пределов последовательностей. Арифметические действия над пределами. Вычисление предела функции. Исследование функции на непрерывность. Определение точек разрыва и их рода.
2.2	Дифференциальное исчисление функции одного переменного	Вычисление производных элементарных функций. Вычисление производных сложных функций. обратных функций. Приближенные вычисления с помощью дифференциала. Производные высших порядков различных функций. Дифференциалы высших порядков. Правило Лопиталя. Исследование функций с помощью производных.
2.3	Интегральное исчисление функции одного переменного	Вычисление неопределенных интегралов различными способами. Вычисление определенных интегралов. Решение задач на приложения определенных интегралов.
2.4	Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных	Вычисление частных производных функций нескольких переменных. Полный дифференциал функции нескольких переменных. Производные и дифференциалы высших порядков для функций нескольких переменных.
2.5	Интегральное исчисление функции нескольких переменных	Вычисление двойных интегралов. Замена переменной в двойном интеграле. Приложение двойного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и физических величин.
2.6	Линейная алгебра.	Элементарные преобразования матриц. Вычисление определителей разных порядков. Нахождение обратной матрицы. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера и Гаусса.
2.7	Векторная алгебра	Линейные операции над векторами. Скалярное, векторное, смешанное и двойное векторное произведения векторов. Координатное выражение произведений векторов.
2.8	Аналитическая геометрия	Полярные координаты. Прямая на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости. Прямая и плоскость в пространстве. Уравнения плоскости и уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Преобразование декартовых координат на плоскости. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду. Поверхности второго порядка (эллипсоид, параболоиды, гиперboloиды, цилиндр, конус), их канонические уравнения. Метод сечений в исследовании формы поверхностей. Приведение общего уравнения кривой и поверхности второго порядка к каноническому виду.
2.9	Обыкновенные дифференциальные уравнения	Дифференциальные уравнения I порядка, разрешенные относительно производной. Частное и общее решение дифференциального уравнения первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Решение простейших дифференциальных уравнений первого порядка, приводящихся к

		уравнениям с разделяющимися переменными. Простейшие дифференциальные уравнения высших порядков. Решение простейших дифференциальных уравнений высших порядков. Частное и общее решение дифференциальных уравнений высших порядков. Нахождение произвольных постоянных общего решения с использованием начальных условий. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами. Использование дифференциальных уравнений в прикладных задачах.
2.10	Уравнения в частных производных	Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка. Линейные однородные уравнения. Квазилинейные уравнения. Нелинейные уравнения. Уравнение переноса вещества потоком воздуха. Смешанная задача для волнового 6. Решение задач Коши. Виды граничных условий. Смешанная задача. Математические модели стационарных процессов.
2.11	Математическое моделирование и обработка результатов измерения	Вычисление погрешностей. Применение метода наименьших квадратов.

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)			
		Лекции	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа	Всего
1	Введение в математический анализ	2	6	6	14
2	Дифференциальное исчисление функции одного переменного	4	10	4	18
3	Интегральное исчисление функции одного переменного	4	10	8	22
4	Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных	4	10	6	20
5	Интегральное исчисление функции нескольких переменных	4	10	6	20
6	Линейная алгебра. Векторная алгебра	4	4	6	14
7	Аналитическая геометрия	2	4	6	12
8	Обыкновенные дифференциальные уравнения	4	4	6	14
9	Уравнения в частных производных	2	4	6	12
10	Математическое моделирование и обработка результатов измерения	2	2	4	10
	Контроль				36
	Итого:	32	64	58	216

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В целом самостоятельная работа студентов направлена на более глубокое изучение студентами отдельных вопросов курса с использованием рекомендуемой дополнительной литературы и других информационных источников и включает:

- самостоятельное изучение студентами отдельных вопросов, связанных с отдельными частями курса. Необходимые для занятий информационные материалы предоставляются студентам в электронном виде;
- перечень разделов курса, представляемых студентам в форме раздаточного материала с пометкой «самостоятельно»;
- дополнительная проработка лекционных материалов по записям прочитанных лекций и представленного раздаточного материала по тематике курса;
- подготовка к участию в работе практических занятий по предусмотренным программой темам;

- формирование неясных вопросов для их рассмотрения во время лекционных и практических занятий с помощью преподавателя.

Студенты знакомятся с теоретическим материалом в процессе лекционного курса, самостоятельно прорабатывают и усваивают теоретические знания с использованием рекомендуемой учебной литературы, учебно-методических пособий, согласно указанному списку (п.15, 16).

Обучение лиц с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с учетом их индивидуальных психофизических особенностей и в соответствии с индивидуальной программой реабилитации.

Промежуточная аттестация для лиц с нарушениями слуха проводится в письменной форме, при этом используются общие критерии оценивания. При необходимости время подготовки на экзамене может быть увеличено.

Для лиц с нарушением зрения допускается аудиальное предоставление информации (например, с использованием программ-синтезаторов речи), а так же использование на лекциях звукозаписывающих устройств (диктофонов и т.д.). На лекционных занятиях и лабораторных занятиях при необходимости допускается присутствие ассистента. При проведении промежуточной аттестации для лиц с нарушением зрения тестирование может быть заменено на устное собеседование по вопросам. При необходимости, время подготовки на экзамене может быть увеличено.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата на лекционных занятиях и лабораторных занятиях при необходимости допускается присутствие ассистента.

Промежуточная аттестация для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата проводится на общих основаниях, при необходимости процедура экзамена может быть реализована дистанционно.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты. / Л.А. Кузнецов. — СПб.: Лань, 2015. — 240 с. // Издательство «Лань» : электронно-библиотечная система. – URL: http://e.lanbook.com/book/4549
2	Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики: учебн. пособие / А.Н. Бородин. — СПб. : Лань, 2011. — 256 с. // Издательство «Лань» : электронно-библиотечная система. – URL: http://e.lanbook.com/book/2026
3	Горлач Б.А. Теория вероятностей и математическая статистика. Б.А. Горлач. — СПб. : Лань, 2013. — 320 с. // Издательство «Лань»: электронно-библиотечная система. – URL: http://e.lanbook.com/book/4864
4	Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений: учебн. пособие / Ю.Н. Бибииков. — СПб. : Лань, 2011. — 304 с. // Издательство «Лань» : электронно-библиотечная система. – URL: http://e.lanbook.com/book/1542

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
5	Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа : учебник. В 2 т. / Л.Д. Кудрявцев .— Висагинас : Alfa, 1998-.Т. 1: Дифференциальное и интегральное исчисления функции одной переменной. Ряды .— 1998 .— 397 с.
6	Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа : Учебник для студ. физ.-мат. и инж.-физ. спец. вузов: В 2 т. / Л.Д. Кудрявцев .— Висагинас : Alfa, 1998-.Т. 2: Дифференциальное и интегральное исчисления функции многих переменных. Гармонический анализ .— 1998 .— 381 с.
7	Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа: учебник / Г. М. Фихтенгольц .— СПб. : Лань, 2001- Т. 1. – 440 с.
8	Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа: учебник / Г. М. Фихтенгольц .— СПб. : Лань, 2001. — Т. 2. – 463 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Ресурсы Интернет
9	Скляднев С.А. <i>Математический анализ (Множества. Метод математической индукции): учебн.</i>

	пособие для вузов / С.А. Складнев, С.В. Писарева. — Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2012 . 23 с. // URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m12-113.pdf .
	ЭБС Издательство «Лань»

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)

№ п/п	Источник
1	Антонов В.И. Элементарная математика для первокурсника : учебн. пособие / В.И. Антонов, Ф.И. Копелевич. — СПб. : Лань, 2013. — 112 с. // Издательство «Лань»: электронно-библиотечная система. — URL: http://e.lanbook.com/book/5701
2	Миносцев В. Сборник индивидуальных заданий по математике для технических высших учебных заведений. Часть 2. [Электронный ресурс] : Учебные пособия / В. Миносцев [и др.]. — СПб. : Лань, 2013. — 320 с. // Издательство «Лань» : электронно-библиотечная система. — URL: http://e.lanbook.com/book/32816
3	Бугров Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного : учебник / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. — Ростов н/Д : Феникс, 1997. — 511 с.
4	Мартинсон Л.К. Дифференциальные уравнения математической физики: учебник / Л.К. Мартинсон, Ю.И. Малов. — М.: МГТУ им.Н.Э.Баумана, 1996. — 364 с.
5	Складнев С.А. Математический анализ (числовые последовательности) / С.А. Складнев, С.В. Писарева. — Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2012. — 26 с. // URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m12-136.pdf .
6	Дифференциальные уравнения: конспекты лекций, вопросы и задачи / И.Н. Прядко, Л.П. Петрова. — Воронеж, 2015 // URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-219.pdf

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

DreamSpark (неограниченное кол-во настольных и серверных операционных систем Microsoft для использования в учебном и научном процессе) - лицензия действует до 31.12.2019, дог. 3010-15/1102-16 от 26.12.2016.

Microsoft Office Professional 2003 Win32 Russian, бессрочная лицензия Academic Open, дог. 0005003907-24374 от 23.10.2006.

Офисная система LibreOffice 4.4.4 (Свободно распространяемое программное обеспечение)

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа (г.Воронеж, площадь Университетская, д.1, пом.І, ауд. 430): специализированная мебель, проектор BenQ MP515, мобильный экран для проектора, ноутбук HP comrag px9030 с возможностью подключения к сети «Интернет»

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, текущего контроля и промежуточной аттестации (г.Воронеж, площадь Университетская, д.1, пом.І, ауд. 320) : специализированная мебель, проектор BenQ MP515, ноутбук HP comrag px9030, мобильный экран для проектора

Помещение для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования (г.Воронеж, площадь Университетская, д.1, пом.І, ауд. 70) : мобильный экран для проектора, проектор BenQ MP515, ноутбук HP comrag px9030 с возможностью подключения к сети «Интернет»

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, текущего контроля и промежуточной аттестации (г.Воронеж, ул.Пушкинская, д.16, ауд. 118): специализированная мебель, мобильный экран для проектора, проектор BenQ MP515, ноутбук Lenovo G500 с возможностью подключения к сети «Интернет»

Учебная аудитория для проведения групповых и индивидуальных консультаций, для проведения промежуточной аттестации (г.Воронеж, площадь Университетская, д.1, пом.І, ауд. 316) : специализированная мебель

Дисплейный класс, аудитория для проведения групповых и индивидуальных консультаций, помещение для самостоятельной работы (г.Воронеж, площадь Университетская, д.1, пом.І, ауд. 67) : специализированная мебель, компьютеры (системный блок Intel Celeron CPU 430 1.8 GHz, монитор Samsung SyncMaster 17) (12 шт.) с возможностью подключения к сети «Интернет»

Компьютерный класс, аудитория для проведения групповых и индивидуальных консультаций, помещение для самостоятельной работы (г.Воронеж, площадь Университетская, д.1, пом.І, ауд. 40/5) : специализированная мебель, компьютеры (системный блок Pentium Dual Core CPU E6500, монитор LG Flatron L1742 (17 шт.) с возможностью подключения к сети «Интернет»

Компьютерный класс, помещение для самостоятельной работы (г.Воронеж, площадь Университетская, д.1, пом.І, ауд. 40/3) : специализированная мебель, компьютеры (системный блок Intel Core i5-2300 CPU, монитор LG Flatron E2251 (10 шт.) с возможностью подключения к сети «Интернет»

19. Фонд оценочных средств:

19.1. Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

Код и содержание компетенции	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции посредством формирования знаний, умений, навыков)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС* (средства оценивания)
ОПК-1.2 Использует основные естественнонаучные понятия и методы исследований при решении профессиональных задач	Знать основные термины и инструменты математического анализа, методы самоконтроля и приобретения новых навыков. Уметь абстрактно мыслить, анализировать, производить синтез, самостоятельно применять методы и средства познания, обучения и самоконтроля для приобретения новых знаний и умений, в том числе в новых областях, непосредственно не связанных со сферой деятельности, развития социальных и профессиональных компетенций, изменения вида своей профессиональной деятельности.	Раздел 1. Введение в математический анализ Раздел 2. Дифференциальное исчисление функции одного переменного Раздел 3. Интегральное исчисление функции одного переменного Раздел 4. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных Раздел 5. Интегральное исчисление функции нескольких переменных Раздел 6. Линейная алгебра. Векторная алгебра	Контрольные работы

	Владеть приемами применения основных математических понятий и методов при решении профессиональных задач	Раздел 7. Аналитическая геометрия Раздел 8. Обыкновенные дифференциальные уравнения Раздел 9. Уравнения в частных производных Раздел 10. Математическое моделирование и обработка результатов измерения	
Промежуточная аттестация (зачет)			Комплект КИМ №1
Промежуточная аттестация (экзамен)			Комплект КИМ №2

19.2 Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Для оценивания результатов обучения на зачете используются следующие:

- 1) знание учебного материала и владение понятийным аппаратом дисциплины;
- 2) умение связывать теорию с практикой;
- 3) умение иллюстрировать ответ примерами;
- 4) умение применять методы математического анализа для решения прикладных задач.

Для оценивания результатов обучения на зачете используется – зачтено, не зачтено
Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Шкала оценок
Сформированные знания об основных терминах и инструментах математического анализа, о методах самоконтроля и приобретения новых навыков. Сформированное умение абстрактно мыслить, анализировать, производить синтез, самостоятельно применять методы и средства познания, обучения и самоконтроля для приобретения новых знаний и умений, в том числе в новых областях, непосредственно не связанных со сферой деятельности, развития социальных и профессиональных компетенций, изменения вида своей профессиональной деятельности.	<i>Зачтено</i>
Фрагментарные знания или отсутствие знаний.	<i>Не зачтено</i>

Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие:

- 1) знание учебного материала и владение понятийным аппаратом дисциплины;
- 2) умение связывать теорию с практикой;
- 3) умение решать практические занятия;
- 4) умение иллюстрировать ответ примерами;
- 5) умение применять методы математического анализа для решения прикладных задач.

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Шкала оценок
Сформированные знания об основных терминах и инструментах математического анализа, о методах самоконтроля и приобретения новых навыков. Сформированное умение абстрактно мыслить, анализировать, производить синтез, самостоятельно применять методы и средства познания, обучения и самоконтроля для приобретения новых знаний и умений, в том числе в новых областях, непосредственно не связанных со сферой деятельности, развития социальных и профессиональных компетенций, изменения вида своей профессиональной деятельности.	<i>Отлично</i>
Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления об основных терминах и инструментах математического анализа, о методах самоконтроля и приобретения новых навыков. Успешное, но содержащее отдельные пробелы умение абстрактно мыслить, анализировать, производить синтез, самостоятельно применять методы и средства познания, обучения и самоконтроля для приобретения новых знаний и умений, в том числе в новых областях, непосредственно не связанных со сферой деятельности, развития социальных и профессиональных компетенций, изменения вида своей профессиональной деятельности.	<i>Хорошо</i>
Неполное представление об основных терминах и инструментах математического анализа, о методах самоконтроля и приобретения новых навыков. Успешное, но не системное умение абстрактно мыслить, анализировать, производить синтез, самостоятельно применять методы и средства познания, обучения и самоконтроля для приобретения новых знаний и умений, в том числе в новых областях, непосредственно не связанных со сферой деятельности, развития социальных и профессиональных компетенций, изменения вида своей профессиональной деятельности.	<i>Удовлетворительно</i>
Фрагментарные знания или отсутствие знаний.	<i>Неудовлетворительно</i>

19.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

19.3.1 Перечень вопросов к зачету:

- 1) Предел переменной величины. Определение предела на языке последовательностей.
- 2) Арифметические действия над пределами.
- 3) Определение функции. Понятие сложной функции. Классификация элементарных функций (целые рациональные, дробно-рациональные, иррациональные, трансцендентные).
- 4) Определение предела функции. Бесконечно малая и большая функции. Односторонние пределы.
- 5) Непрерывность функции в точке. Точки разрыва и их классификация. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
- 6) Понятие производной. Геометрический и физический смысл производной.
- 7) Дифференцируемость функций. Основные правила дифференцирования.
- 8) Производные сложной функции, обратной функции, вывод таблицы производных элементарных функций.
- 9) Понятие дифференциала. Приближенные вычисления с помощью дифференциала.
- 10) Производные высших порядков различных функций.
- 11) Дифференциалы высших порядков.
- 12) Правило Лопиталя.

- 13) Исследование функций методами анализа. Интервалы монотонного изменения функции.
- 14) Экстремум функции. Исследование функции на экстремум с помощью производной второго порядка.
- 15) Участки выпуклости графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции.
- 16) Общая схема исследования графика функции.
- 17) Неопределенный интеграл (определение неопределенного интеграла, его свойства, таблица неопределенных интегралов).
- 18) Метод интегрирования, основанный на инвариантности формы неопределенного интеграла (метод замены переменной).
- 19) Интегрирование по частям.
- 20) Интегрирование дробно-рациональных выражений (интегрирование дробей простейшего вида, понятие неправильной дроби, разложение правильной дроби на сумму простейших дробей).
- 21) Интегрирование тригонометрических выражений.
- 22) Определенный интеграл (определение на основе геометрической задачи о площади криволинейной трапеции), его свойства.
- 23) Оценки определенного интеграла.
- 24) Интеграл с переменным верхним пределом.
- 25) Формула Ньютона – Лейбница.
- 26) Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям.
- 27) Геометрические и физические задачи с использованием определенного интеграла (вычисление площади плоской фигуры, вычисление работы переменной силы).
- 28) Несобственные интегралы (от неограниченных функций, с бесконечными пределами).
- 29) Функции нескольких переменных (определение, область определения).
- 30) Предел функции нескольких переменных, способы вычисления. Непрерывность функции.
- 31) Определение частных производных, их геометрический смысл.
- 32) Полный дифференциал как сумма частных дифференциалов, приложение полного дифференциала.
- 33) Производные высших порядков (обозначение, понятийный смысл, доказательство теоремы о смешанных производных).
- 34) Дифференциалы высших порядков.
- 35) Интегрирование функций двух переменных.
- 36) Определение двойного интеграла, его геометрический смысл, свойства.
- 37) Вычисление двойного интеграла для прямоугольной и криволинейной областей. Замена переменной в двойном интеграле.
- 38) Приложение двойного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и физических величин.

19.3.2 Перечень вопросов к экзамену:

- 1) Матрицы. Основные понятия и определения, основные виды матриц.
- 2) Операции над матрицами.
- 3) Определители 2, 3, n -го порядков и их свойства.
- 4) Обратная матрица.
- 5) Теорема существования и единственности обратной матрицы.
- 6) Нахождение обратной матрицы.
- 7) Решение матричных уравнений. Формулы Крамера.
- 8) Системы линейных алгебраических уравнений, основные понятия и определения.
- 9) Совместность систем линейных алгебраических уравнений.
- 10) Теорема Кронекера – Капелли.

- 11)** Методы нахождения решения системы линейных алгебраических уравнений (метод Крамера, метод Гаусса, матричный метод).
- 12)** Однородные системы линейных алгебраических уравнений.
- 13)** Фундаментальная система решений.
- 14)** Определение вектора как элемента линейного пространства.
- 15)** Линейные операции над векторами.
- 16)** Скалярное, векторное, смешанное и двойное векторное произведения векторов, их основные свойства, геометрический и физический смысл. Координатное выражение произведений векторов.
- 17)** Общие понятия о линии, поверхности.
- 18)** Уравнения линий и поверхностей.
- 19)** Полярные координаты.
- 20)** Прямая на плоскости.
- 21)** Различные формы уравнений прямой на плоскости.
- 22)** Взаимное положение прямых на плоскости.
- 23)** Прямая и плоскость в пространстве.
- 24)** Уравнения плоскости и уравнения прямой в пространстве.
- 25)** Взаимное расположение прямых и плоскостей.
- 26)** Геометрические определения кривых второго порядка (эллипс, гипербола, парабола).
- 27)** Вывод канонических уравнений этих кривых, построение кривых второго порядка по их каноническому уравнению.
- 28)** Преобразование декартовых координат на плоскости.
- 29)** Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду. Поверхности второго порядка (эллипсоид, параболоиды, гиперболоиды, цилиндр, конус), их канонические уравнения.
- 30)** Метод сечений в исследовании формы поверхностей.
- 31)** Приведение общего уравнения кривой и поверхности второго порядка к каноническому виду.
- 32)** Общие понятия теории дифференциальных уравнений.
- 33)** Дифференциальные уравнения I порядка, разрешенные относительно производной.
- 34)** Частное и общее решение дифференциального уравнения первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными.
- 35)** Решение простейших дифференциальных уравнений первого порядка, приводящихся к уравнениям с разделяющимися переменными.
- 36)** Простейшие дифференциальные уравнения высших порядков.
- 37)** Решение простейших дифференциальных уравнений высших порядков.
- 38)** Частное и общее решение дифференциальных уравнений высших порядков.
- 39)** Нахождение произвольных постоянных общего решения с использованием начальных условий.
- 40)** Решение линейных однородных дифференциальных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами.
- 41)** Использование дифференциальных уравнений в прикладных задачах.
- 42)** Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка.
- 43)** Линейные однородные уравнения.
- 44)** Квазилинейные уравнения.
- 45)** Нелинейные уравнения.
- 46)** Уравнение переноса вещества потоком воздуха.
- 47)** Основные уравнения математической физики и постановка начально-краевых задач.
- 48)** Понятие корректно поставленной задачи. Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны.
- 49)** Постановка задач Коши.

- 50) Классификация граничных условий.
- 51) Смешанная задача для волнового уравнения.
- 52) Примеры задач, сводящиеся к решению волнового уравнения.
- 53) Вывод уравнения диффузии.
- 54) Вывод уравнения теплопроводности.
- 55) Постановка задачи Коши. Виды граничных условий. Смешанная задача.
- 56) Математические модели стационарных процессов.
- 57) Основы математического моделирования.
- 58) Теория погрешностей.
- 59) Метод наименьших квадратов.

19.3.3 Перечень заданий для контрольных работ (1 семестр)

- 1) Используя определение предела последовательности, доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$,
 для $a_n = \frac{9 - n^3}{1 + 2n^3}$, $a = -\frac{1}{2}$.

Вычислить пределы последовательностей

2)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (2n - 1) - 2n}{\sqrt[3]{n^3 + 2n + 2}}$$

3)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{(n^2 + 1)(n^2 + 2)} - \sqrt{(n^2 - 1)(n^2 - 2)} \right)$$

Вычислить пределы функций

4)
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)^3}{x^4 + 2x + 1}.$$

5)
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x + 4} - \sqrt{x^2 - 4x + 3} \right).$$

- 6) Используя таблицу эквивалентных функций, вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(12x^3)}{\ln(1 + 2x) \operatorname{tg}^2 \sqrt{3x}}.$$

7) Вычислить $f'(x)$: $y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{2}}} - \frac{x}{(x-1)^3} + 3e^2$.

8) Найти производную функции $f(x) = (2 \sin(x - \frac{\pi}{4}) + 3)^{2 \operatorname{tg} x - 1}$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

- 9) Найти первый и второй дифференциалы функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $2x^3 y^2 - 2xy + 4x^2 - y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$, в точке $A(1, 0)$.

- 10) Найти участки возрастания, убывания и точки экстремума функции $f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$.

11) Вычислить интегралы: $\int_0^1 e^{2x} dx$, $\int_0^3 \frac{dx}{4x + 2}$, $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx$.

12) Найти асимптоты графика функции $y = \sqrt{x^2 + 2x}$.

13) Провести полное исследование и построить график функции $y = \ln(\operatorname{tg} x)$.

- 14) Вычислить частные производные первого порядка функции

а) $f(x, y) = \frac{x^3}{2\sqrt{y}} - x \ln(\sin y)$; б) $f(x, y, z) = (x^2 - 2y^2 + xz)^{\operatorname{arcsin} 2x}$.

15) Найти f_{xxz}''' для $f(x, y, z) = 2^{xy^2-z^3} - \frac{x^2 y}{z}$.

19.3.4 Перечень заданий для контрольных работ по линейной алгебре (2 семестр) Контрольная работа №1

Вариант 1

1. Найти все решения системы линейных уравнений. Указать базисные и свободные переменные.

$$a) \begin{cases} x + y - 3z = 8 \\ x + 2y - 4z = 9 \\ 2x + y - 3z = 11 \end{cases} \quad \hat{a}) \begin{cases} 2x - 2z = 1 \\ 2x - 2y + z = 2 \\ 6x - 2y - 3z = 3 \end{cases}$$

$$\hat{a}) \begin{cases} x - 2y + 4z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ 2x - 2y + 6z = 0 \end{cases}$$

2. Решить систему линейных уравнений. Указать базисное решение.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 2x_1 + 10x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 8 \\ -3x_1 - 15x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = -11 \end{cases}$$

3. Вычислить: а) $A^T \cdot B - 5 \cdot E$; б) $(C \cdot D + D^T \cdot C^T)^3$, где E – единичная матрица,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вариант 2

1. Найти все решения системы линейных уравнений. Указать базисные и свободные переменные.

$$a) \begin{cases} 3x + y + 2z = 8 \\ 3x + 2y + 3z = 9 \\ 6x + y + 3z = 15 \end{cases} \quad \hat{a}) \begin{cases} -2x + y - z = 1 \\ 2x + 2y + z = -1 \\ -2x + 4y - z = 0 \end{cases}$$

$$\hat{a}) \begin{cases} x + 3y - 6z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - 9z = 0 \end{cases}$$

2. Решить систему линейных уравнений. Указать базисное решение.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = -3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 11x_4 - 4x_5 = -6 \\ -3x_1 - 6x_2 - 2x_3 - 9x_4 + 12x_5 = 7 \end{cases}$$

3. Вычислить: а) $A \cdot B^T - 6 \cdot E$; б) $(C \cdot D + D^T \cdot C^T)^3$, где E – единичная матрица,

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вариант 3

1. Найти все решения системы линейных уравнений. Указать базисные и свободные переменные.

$$a) \begin{cases} -3x + y + 5z = -9 \\ -3x + 2y + 8z = -17 \\ -6x + y + 5z = -6 \end{cases} \quad \hat{a)} \begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ 2x - y + z = -2 \\ 4x - 5y - 5z = -1 \end{cases}$$

$$\hat{a)} \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

2. Решить систему линейных уравнений. Указать базисное решение.

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_5 = -3 \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_3 + 11x_4 - 9x_5 = -6 \\ -3x_1 + 15x_2 - 2x_3 - 9x_4 + 2x_5 = 11 \end{cases}$$

3. Вычислить: а) $A^T \cdot B - 8 \cdot E$; б) $(C \cdot D + D^T \cdot C^T)^3$, где E – единичная матрица,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вариант 4

1. Найти все решения системы линейных уравнений. Указать базисные и свободные переменные.

$$a) \begin{cases} 3x + y + 3z = -12 \\ 3x + 2y + 4z = -17 \\ 6x + y + 5z = -19 \end{cases} \quad \hat{a)} \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \\ 4x + 3y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$\hat{a)} \begin{cases} -2x + 4y + 16z = 0 \\ -3x - 4y + 4z = 0 \\ -7x + 4y + 36z = 0 \end{cases}$$

2. Решить систему линейных уравнений. Указать базисное решение.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 10x_4 - 12x_5 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 9x_5 = 5 \end{cases}$$

3. Вычислить: а) $A^T \cdot B - 8 \cdot E$; б) $(C \cdot D + D^T \cdot C^T)^3$, где E – единичная матрица,

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 5

1. Найти все решения системы линейных уравнений. Указать базисные и свободные переменные.

$$a) \begin{cases} 3x + y = 6 \\ 3x + 2y - 2z = 5 \\ 6x + y + 5z = 10 \end{cases} \quad \hat{a}) \begin{cases} 2x - 2y - 2z = 1 \\ 2x - 2y + z = 2 \\ 6x - 6y - 3z = 3 \end{cases}$$

$$\hat{a}) \begin{cases} -x - 4y - 8z = 0 \\ -2x + 4y - 4z = 0 \\ -4x - 4y - 20z = 0 \end{cases}$$

2. Решить систему линейных уравнений. Указать базисное решение.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 3x_5 = -4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + 4x_5 = -8 \\ -3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 10x_5 = 15 \end{cases}$$

3. Вычислить: а) $A^T \cdot B - 4 \cdot E$; б) $(C \cdot D + D^T \cdot C^T)^3$, где E – единичная матрица,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вариант 6

1. Найти все решения системы линейных уравнений. Указать базисные и свободные переменные.

$$a) \begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ 2x + 2y + 5z = 10 \\ 4x + y - z = 4 \end{cases} \quad \hat{a}) \begin{cases} x + 3y + 3z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ 4x + 5y + 7z = 5 \end{cases}$$

$$\hat{a}) \begin{cases} x - 3y + 6z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ 2x - 3y + 9z = 0 \end{cases}$$

2. Решить систему линейных уравнений. Указать базисное решение.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 7 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 6x_5 = -2 \end{cases}$$

3. Вычислить: а) $A \cdot B^T - 6 \cdot E$; б) $(C \cdot D + D^T \cdot C^T)^3$, где E – единичная матрица,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вариант 7

1. Найти все решения системы линейных уравнений. Указать базисные и свободные переменные.

$$\begin{aligned} a) \begin{cases} -3x + y - z = -1 \\ -3x + 2y - z = -3 \\ -6x + y - z = 2 \end{cases} \quad \hat{a}) \begin{cases} x - 3y - z = -3 \\ 2x - y + z = 3 \\ 4x - 7y - z = 0 \end{cases} \\ \hat{a}) \begin{cases} x - 3y + 6z = 0 \\ -y + z = 0 \\ 2x - 3y + 9z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2. Решить систему линейных уравнений. Указать базисное решение.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_5 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 5x_4 + x_5 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 9x_5 = 1 \end{cases}$$

3. Вычислить: а) $A^T \cdot B - 6 \cdot E$; б) $(C \cdot D + D^T \cdot C^T)^3$, где E – единичная матрица,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вариант 8

1. Найти все решения системы линейных уравнений. Указать базисные и свободные переменные.

$$a) \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ -x + 2y + z = -2 \\ -2x + y + 3z = 6 \end{cases} \quad \hat{a}) \begin{cases} -2x + y + 2z = -3 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ -2x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\hat{a}) \begin{cases} -2x + 3y + 12z = 0 \\ -3x - 3y + 3z = 0 \\ -7x + 3y + 27z = 0 \end{cases}$$

2. Решить систему линейных уравнений. Указать базисное решение.

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 + x_4 - 4x_5 = 4 \\ -4x_1 + 10x_2 - 9x_3 + x_4 + 9x_5 = -5 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 7 \end{cases}$$

3. Вычислить: а) $A \cdot B^T - 4 \cdot E$; б) $(C \cdot D + D^T \cdot C^T)^3$, где E – единичная матрица,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вариант 9

1. Найти все решения системы линейных уравнений. Указать базисные и свободные переменные.

$$a) \begin{cases} -x + y + 2z = 2 \\ -x + 2y + 5z = 5 \\ -2x + y - z = -3 \end{cases} \quad \hat{a}) \begin{cases} -2x + y - z = 3 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ -2x + 4y - z = 5 \end{cases}$$

$$\hat{a}) \begin{cases} x - 2y + 4z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ 2x - 2y + 6z = 0 \end{cases}$$

2. Решить систему линейных уравнений. Указать базисное решение.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_5 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 - 4x_5 = -2 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 3x_4 - x_5 = 16 \end{cases}$$

3. Вычислить: а) $A^T \cdot B - 3 \cdot E$; б) $(C \cdot D + D^T \cdot C^T)^3$, где E – единичная матрица,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 10

1. Найти все решения системы линейных уравнений. Указать базисные и свободные переменные.

$$a) \begin{cases} -3x + y - 4z = -7 \\ -3x + 2y - 6z = -8 \\ -6x + y - 3z = -13 \end{cases} \quad \hat{a}) \begin{cases} -2x + 3y - z = 3 \\ 2x + 2y + z = 1 \\ -2x + 8y - z = 4 \end{cases}$$
$$\hat{a}) \begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 5x + y - 7z = 0 \end{cases}$$

2. Решить систему линейных уравнений. Указать базисное решение.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

3. Вычислить: а) $A \cdot B^T - 5 \cdot E$; б) $(C \cdot D + D^T \cdot C^T)^3$, где E – единичная матрица,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Будут ли строки или столбцы матриц линейно зависимы? Каков ранг матрицы В?

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 2 & 4 \\ -12 & -2 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & -6 & 2 \\ 2 & -5 & -4 & -4 & 6 \\ -3 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & -5 \\ -6 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -13 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

3. Решить квадратное уравнение $z^2 - 8z + 41 = 0$ с комплексными корнями z_1 и z_2 и вычислить:

$$a) i \cdot (z_1 + z_2); \quad б) |z_1 - z_2|; \quad в) z_1 \cdot z_2.$$

4. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Вариант 2

1. Будут ли строки или столбцы матриц линейно зависимы? Каков ранг матрицы В?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -6 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 6 \\ -6 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 27 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

3. Решить квадратное уравнение $z^2 + 6z + 18 = 0$ с комплексными корнями z_1 и z_2 и вычислить:

$$\text{а) } i \cdot (z_1 + z_2); \quad \text{б) } |z_1 - z_2|; \quad \text{в) } z_1 \cdot z_2.$$

4. Найти обратную матрицу A^{-1} , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 3

1. Будут ли строки или столбцы матриц линейно зависимы? Каков ранг матрицы В?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & -3 \\ 4 & -4 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. Решить квадратное уравнение $z^2 + 8z + 32 = 0$ с комплексными корнями z_1 и z_2 и вычислить:

$$\text{а) } i \cdot (z_1 + z_2); \quad \text{б) } |z_1 - z_2|; \quad \text{в) } z_1 \cdot z_2.$$

4. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вариант 4

1. Будут ли строки или столбцы матриц линейно зависимы? Каков ранг матрицы В?

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 & -3 \\ -5 & 0 & 2 & 0 \\ -12 & -2 & 5 & -6 \\ 6 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & -4 & 1 & 7 \\ -4 & 2 & 4 & 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

3. Решить квадратное уравнение $z^2 - 10z + 34 = 0$ с комплексными корнями z_1 и z_2 и вычислить:

$$\text{а) } i \cdot (z_1 + z_2); \quad \text{б) } |z_1 - z_2|; \quad \text{в) } z_1 \cdot z_2.$$

4. Найти обратную матрицу A^{-1} , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 5

1. Будут ли строки или столбцы матриц линейно зависимы? Каков ранг матрицы В?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 4 \\ -2 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 4 & -9 & -4 \\ 7 & 1 & -4 & 6 & 1 \\ -5 & -1 & 3 & -5 & -1 \\ -8 & -2 & 6 & -9 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. Решить квадратное уравнение $z^2 - 8z + 25 = 0$ с комплексными корнями z_1 и z_2 и вычислить:

$$\text{а) } i \cdot (z_1 + z_2); \quad \text{б) } |z_1 - z_2|; \quad \text{в) } z_1 \cdot z_2.$$

4. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 6

1. Будут ли строки или столбцы матриц линейно зависимы? Каков ранг матрицы В?

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & -1 & 3 & 5 \\ -2 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ -6 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

3. Решить квадратное уравнение $z^2 + 2z + 26 = 0$ с комплексными корнями z_1 и z_2 и вычислить:

$$\text{а) } i \cdot (z_1 + z_2); \quad \text{б) } |z_1 - z_2|; \quad \text{в) } z_1 \cdot z_2.$$

4. Найти обратную матрицу A^{-1} , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вариант 7

1. Будут ли строки или столбцы матриц линейно зависимы? Каков ранг матрицы В?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 & -3 \\ -4 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ -6 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Решить квадратное уравнение $z^2 - 6z + 13 = 0$ с комплексными корнями z_1 и z_2 и вычислить:

$$\text{а) } i \cdot (z_1 + z_2); \quad \text{б) } |z_1 - z_2|; \quad \text{в) } z_1 \cdot z_2.$$

4. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 8

1. Будут ли строки или столбцы матриц линейно зависимы? Каков ранг матрицы В?

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & 0 \\ -8 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -2 & -4 \\ 5 & 6 & -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

3. Решить квадратное уравнение $z^2 - 2z + 10 = 0$ с комплексными корнями z_1 и z_2 и вычислить:

$$\text{а) } i \cdot (z_1 + z_2); \quad \text{б) } |z_1 - z_2|; \quad \text{в) } z_1 \cdot z_2.$$

4. Найти обратную матрицу A^{-1} , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вариант 9

1. Будут ли строки или столбцы матриц линейно зависимы? Каков ранг матрицы В?

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & -2 \\ 14 & 6 & 5 & 0 \\ -7 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 & -4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 7 & -3 & -2 & 1 \\ -5 & 7 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

3. Решить квадратное уравнение $z^2 + 8z + 20 = 0$ с комплексными корнями z_1 и z_2 и вычислить:

$$\text{а) } i \cdot (z_1 + z_2); \quad \text{б) } |z_1 - z_2|; \quad \text{в) } z_1 \cdot z_2.$$

4. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Вариант 10

1. Будут ли строки или столбцы матриц линейно зависимы? Каков ранг матрицы В?

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ -4 & -4 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & -4 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

3. Решить квадратное уравнение $z^2 + 4z + 8 = 0$ с комплексными корнями z_1 и z_2 и вычислить:

$$\text{а) } i \cdot (z_1 + z_2); \quad \text{б) } |z_1 - z_2|; \quad \text{в) } z_1 \cdot z_2.$$

4. Найти обратную матрицу A^{-1} , если

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

19.3.5 Перечень заданий для контрольной работы по векторной алгебре (2 семестр) Контрольная работа

1. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, разложенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

2. Перпендикулярны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

3. Компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

4. Найти угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

5. Даны координаты точек A, B, C . Вычислить:

1) $\text{пр}_{\vec{BC}} \vec{AB}$;

2) $\text{пр}_{(\vec{AB} + \vec{CB})} (2\vec{AC} + 3\vec{CB})$;

3) $|\vec{AB} + 4\vec{BC}|$;

4) $\angle((\vec{AB} - \vec{CB}), \vec{AB})$;

5) $(\vec{AB}, \vec{BC})$;

6) $((\vec{AB} + 4\vec{BC}), (\vec{BA} - \vec{AC}))$;

7) $[\vec{AB}, \vec{BC}]$;

8) $[(\vec{AB} + 2\vec{BC}), (\vec{CB} - \vec{AB})]$;

9) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} \cdot \vec{AC}$;

10) $[[(\vec{AB} + \vec{BC}), \vec{BC}], \vec{AC}]$;

11) $(\vec{AB}, \vec{BC}) \cdot \vec{AC}$;

12) орт вектора $\vec{AB}$;

6. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Вычислить:

- 1) объем пирамиды;
- 2) длину ребра AB ;
- 3) площадь грани ABC ;
- 4) угол между ребрами AB и AD ;

Варианты ВАРИАНТ 1

- 1.1 $\vec{a} = \{1; -2; 3\}, \vec{b} = \{3; 0; 1\}, \vec{c}_1 = 2\vec{a} + 4\vec{b}, \vec{c}_2 = 3\vec{a} - \vec{b}$.
- 2.1 $\vec{a} = \{1; 3; -1\}, \vec{b} = \{3; -2; 3\}$.
- 3.1 $\vec{a} = \{2; 3; -1\}, \vec{b} = \{1; -1; 3\}, \vec{c} = \{1; 9; -1\}$.
- 4.1 $A(1; -2; 3), B(0; -1; 2), C(3; -4; 5)$.
- 5.1 $A(1; 2; 1), B(-1; 3; 4), C(0; 1; 2)$.
- 6.1 $A(1; 1; 1), B(-1; 2; 4), C(2; 0; 6), D(-2; 5; -1)$.
- 7.1 $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}), \vec{c}$.

ВАРИАНТ 2

- 1.2 $y' = (y')^2 - 12xy$
- 2.2 $xy' - y = x^2$
- 3.2 $xy' + y = 3$
- 4.2 $A(0; -3; 6), B(-12; -3; -3), C(-9; -3; -6)$.
- 5.2 $A(0; 1; 2), B(3; -1; 2), C(-1; 2; 5)$.
- 6.2 $A(0; 5; 0), B(2; 3; -4), C(0; 0; 6), D(-3; 1; -1)$.
- 7.2 $((\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]), \vec{a})$.

ВАРИАНТ 3

- 1.3 $\vec{a} = \{-2; 4; 1\}, \vec{b} = \{1; -2; 7\}, \vec{c}_1 = 5\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{c}_2 = 2\vec{a} - \vec{b}$.
- 2.3 $xy' = y \ln(y/x)$
- 3.3 $x^3 y' + x^2 y = 1$
- 4.3 $ydx - 2xdy = 2y^4 dy$
- 5.3 $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$
- 6.3 $A(0; 0; 6), B(4; 0; -4), C(1; 3; -1), D(4; -1; -3)$.
- 7.3 $[[\vec{a}, (\vec{b} + \vec{c})], \vec{d}]$.

ВАРИАНТ 4

- 1.4 $y'' = \frac{1}{x}$
- 2.4 $\vec{a} = \{1; 2; 1\}, \vec{b} = \{3; 1; 2\}$.

$$3.4 \vec{a} = \{1; 2; 4\}, \vec{b} = \{2; 1; -5\}, \vec{c} = \{1; -1; -1\}.$$

$$4.4 y' x \ln x = y$$

$$5.4 xy' + y = y^2$$

$$6.4 xy' = y - xe^x$$

$$7.4 \left[\left[(\vec{a} - \vec{b}), \vec{c} \right], \vec{d} \right].$$

ВАРИАНТ 5

$$1.5 \vec{a} = \{3; 5; 4\}, \vec{b} = \{5; 9; 7\}, \vec{c}_1 = -2\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}_2 = 3\vec{a} - 2\vec{b}.$$

$$2.5 y'' = y' e^y$$

$$3.5 \vec{a} = \{2; -1; 1\}, \vec{b} = \{1; 2; 3\}, \vec{c} = \{1; -3; -2\}.$$

$$4.5 xy' + y = 5$$

$$5.5 y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

$$6.5 y' - y(1+x) = x$$

$$7.5 x(y' - y) = e^x$$

ВАРИАНТ 6

$$1.6 \vec{a} = \{1; 4; -2\}, \vec{b} = \{1; 1; -1\}, \vec{c}_1 = \vec{a} + \vec{b}, \vec{c}_2 = 4\vec{a} + 2\vec{b}.$$

$$2.6 \vec{a} = \{-4; 1; 5\}, \vec{b} = \{1; 3; 1\}.$$

$$3.6 y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$4.6 A(5; 3; -1), B(5; 2; 0), C(6; 4; -1).$$

$$5.6 A(-1; 4; 2), B(5; 2; 3), C(0; 1; 2).$$

$$6.6 A(6; 0; 4), B(0; 6; 4), C(4; 6; 0), D(0; -6; 4).$$

$$7.6 \left[\left[\vec{a}, \vec{b} \right], \vec{c} \right], \vec{d}.$$

ВАРИАНТ 7

$$1.7 \vec{a} = \{1; -2; 5\}, \vec{b} = \{3; -1; 6\}, \vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}.$$

$$2.7 \vec{a} = \{3; -1; 2\}, \vec{b} = \{2; 3; -1\}.$$

$$3.7 \vec{a} = \{1; 1; -1\}, \vec{b} = \{7; 3; -6\}, \vec{c} = \{-1; 1; 9\}.$$

$$4.7 A(-3; -7; -5), B(0; -1; -2), C(2; 3; 0).$$

$$5.7 A(3; -2; 1), B(1; 3; 2), C(2; 4; 1).$$

$$6.7 A(3; 2; 4), B(2; 4; 3), C(4; 3; -2), D(-4; -2; -3).$$

$$7.7 \left((\vec{a}, \vec{b}), \vec{c} \right).$$

ВАРИАНТ 8

$$1.8 \vec{a} = \{3; 5; -1\}, \vec{b} = \{2; -1; 1\}, \vec{c}_1 = 6\vec{a} - 3\vec{b}, \vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}.$$

$$2.8 \vec{a} = \{-4; -1; 5\}, \vec{b} = \{1; -3; 1\}.$$

$$3.8 \vec{a} = \{2; -4; 9\}, \vec{b} = \{2; 0; -3\}, \vec{c} = \{7; 9; -3\}.$$

$$4.8 A(2; -4; 6), B(0; -2; 4), C(2; 3; 0).$$

$$5.8 \ A(-1;3;-1), B(-3;2;3), C(-1;3;0).$$

$$6.8 \ A(6;3;5), B(5;-6;3), C(3;5;6), D(-6;-1;2).$$

$$7.8 \ ((\vec{a}, \vec{b}), \vec{c}) \cdot \vec{c}.$$

ВАРИАНТ 9

$$1.9 \ \vec{a} = \{-2; -3; -2\}, \vec{b} = \{1; 0; 5\}, \vec{c}_1 = 3\vec{a} + 9\vec{b}, \vec{c}_2 = -\vec{a} - 3\vec{b}.$$

$$2.9 \ \vec{a} = \{9; 1; 2\}, \vec{b} = \{-1; 1; 4\}.$$

$$3.9 \ \vec{a} = \{1; 1; 1\}, \vec{b} = \{1; 1; -1\}, \vec{c} = \{6; 0; 5\}.$$

$$4.9 \ A(0; 1; -2), B(3; 1; 2), C(4; 1; 1).$$

$$5.9 \ A(1; -1; 6), B(4; 5; -2), C(-1; 3; 0).$$

$$6.9 \ A(5; -2; -1), B(4; 0; 0), C(2; 5; 1), D(1; 2; 5).$$

$$7.9 \ \left[\left[(\vec{a} + \vec{b}), \vec{c} \right], \vec{a} \right].$$

ВАРИАНТ 10

$$1.10 \ \vec{a} = \{-1; 4; 2\}, \vec{b} = \{3; -2; 6\}, \vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}, \vec{c}_2 = 3\vec{b} - 6\vec{a}.$$

$$2.10 \ \vec{a} = \{8; 2; 3\}, \vec{b} = \{-2; 8; 0\}.$$

$$3.10 \ \vec{a} = \{7; 2; 3\}, \vec{b} = \{5; -3; 2\}, \vec{c} = \{10; -11; 5\}.$$

$$4.10 \ A(3; 3; 1), B(1; 5; -2), C(4; 1; 1).$$

$$5.10 \ A(7; 1; 2), B(-5; 3; -2), C(3; 2; 5).$$

$$6.10 \ A(4; 2; 5), B(3; 0; 4), C(0; 2; 3), D(5; -2; -4).$$

19.3.6 Перечень заданий для контрольной работы по аналитической геометрии (2 семестр)

Контрольная работа

Вариант 1

Задача 1. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1;2)$, $B(-1;3)$, $C(-4;-2)$. Не находя координаты вершины D , найти:

- 1) уравнение стороны AD ;
- 2) уравнение высоты BK , опущенной из вершины B на сторону AD ;
- 3) длину высоты BK ;
- 4) уравнение диагонали BD ;
- 5) тангенс угла между диагоналями параллелограмма.

Записать общие уравнения найденных прямых. Построить чертеж.

Задача 2. Даны точки $A(1;2;3)$, $B(-1;3;5)$, $C(2;0;4)$, $D(3;-1;2)$. Найти:

- 1) общее уравнение плоскости ABC ;
- 2) общее уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC ;
- 3) расстояние от точки D до плоскости ABC ;
- 4) канонические уравнения прямой AB ;
- 5) канонические уравнения прямой, проходящей через точку D параллельно прямой AB ;
- 6) общее уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно прямой AB .

Задача 3. Уравнение второго порядка $2x^2 + 9y^2 - 4x + 6y + 2 = 0$ путем выделения полного квадрата привести к каноническому виду. Построить кривую, определяемую этим уравнением.

Задача 4. Кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho = 3\varphi$.

Требуется:

- 1) найти точки, лежащие на кривой, давая φ значения через промежуток, равный $\frac{\pi}{8}$, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$;
- 2) построить полученные точки;
- 3) построить кривую, соединив построенные точки (от руки или с помощью лекала);
- 4) составить уравнение этой кривой в прямоугольной декартовой системе координат.

Задача 5. Построить на плоскости геометрическое место точек, определяемое неравенствами

- 1) $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2x \end{cases}$;
- 2) $\begin{cases} y \leq \sqrt{9 - x^2} \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

Вариант 2

Задача 1. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(-1;2)$, $B(1;-3)$, $C(4;0)$. Не находя координаты вершины D , найти:

- 1) уравнение стороны AD ;
- 2) уравнение высоты BK , опущенной из вершины B на сторону AD ;
- 3) длину высоты BK ;
- 4) уравнение диагонали BD ;
- 5) тангенс угла между диагоналями параллелограмма.

Записать общие уравнения найденных прямых. Построить чертеж.

Задача 2. Даны точки $A(1;-2;3)$, $B(2;0;5)$, $C(-1;3;4)$, $D(-2;1;-2)$. Найти:

- 1) общее уравнение плоскости ABC ;

- 2) общее уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC;
- 3) расстояние от точки D до плоскости ABC;
- 4) канонические уравнения прямой AB;
- 5) канонические уравнения прямой, проходящей через точку D параллельно прямой AB;
- 6) канонические уравнения прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC.

Задача 3. Уравнение кривой второго порядка $x^2 - 4y^2 + 6x + 4y - 8 = 0$ путем выделения полного квадрата привести к каноническому виду. Построить кривую.

Задача 4. Кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho = 4\cos\varphi$. Требуется:

- 1) найти точки, лежащие на кривой, давая φ значения через промежуток, равный $\frac{\pi}{8}$, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$;
- 2) построить полученные точки;
- 3) построить кривую, соединив построенные точки (от руки или с помощью лекала);
- 4) составить уравнение этой кривой в прямоугольной декартовой системе координат.

Задача 5. Построить на плоскости геометрическое место точек, определяемое неравенствами

- 1) $\begin{cases} y \geq x^2 \\ y - x \leq 0 \end{cases}$;
- 2) $\begin{cases} x \leq \sqrt{4 - y^2} \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

19.3.7 Перечень заданий для контрольной работы по обыкновенным дифференциальным уравнениям (2 семестр)

Контрольная работа

Вариант 1

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(x^2 - y^2)y' = 2xy$;	$y' = (y')^2 - 1$
	в) $2xy$;
б) $xy' - y = x^2$;	г) $xy' + y = 3$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + 4y' + 4y = e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = 8x + y \end{cases}$.

4. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(5;2)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке в 3 раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей точку A с началом координат.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = \sin x$
6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' - y = \frac{e^x}{e^x - 1}$.

Вариант 2

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $xy' = y \ln(y/x)$;	в) $x^3 y' + x^2 y = 1$;
б) $ydx - 2xdy = 2y^4 dy$;	г) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + 4y' - 12y = 8 \sin 2x$; $y(0) = -1, y'(0) = 1$.

3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2y \end{cases}$$
.

4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(10, 10)$ и, обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси абсцисс касательной, проведенной в любой точке кривой, равен кубу абсциссы точки касания.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = \frac{1}{x}$

6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x}$.

Вариант 3

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$;	в) $y'x \ln x = y$;
б) $xy' + y = y^2$;	г) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' - 6y' - 7y = x^2 - x$; $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 3y \end{cases}$$
.

4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(1, 4)$ и, обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной, равен удвоенной абсциссе точки касания.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = y'e^y$

6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' + y = \operatorname{ctg}^2 x$.

Вариант 4

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $xy' + y = 5$;	в) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$;
б) $y' - y(1+x) = x$;	г) $x(y' - y) = e^x$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + 4y' = e^{-2x}$; $y(0) = 1, y'(0) = -2$.

3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2y \end{cases}.$$

4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $B(3, 4)$ и, обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной, равен удвоенному модулю радиус-вектора точки касания.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$

6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$.

Критерии оценок контрольных работ

Ответ оценивается отметкой «5», если:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обоснованиях нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала);

Отметка «4» ставится, если:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умения обосновывать рассуждения не являлись специальным объектом проверки);
- допущена одна ошибка или два-три.

Отметка «3» ставится, если:

- допущены более одной ошибки или более двух- трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но студент владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что студент не владеет обязательными знаниями по данной теме в полной мере;
- работа показала полное отсутствие у учащегося обязательных знаний, умений по проверяемой теме или значительная часть работы выполнена не самостоятельно.

**Пример контрольно-измерительного материала №1
по учебной дисциплине Б1.О.16 Математический анализ**

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
математического анализа

_____ А.Д. Баев
подпись, расшифровка подписи

___. __. 20__

Направление подготовки / специальность	30.05.02 Медицинская биофизика
Дисциплина	Б1.О.16 Математический анализ
Курс	1
Форма обучения	очное
Вид аттестации	промежуточная
Вид контроля	зачет

Билет 1

1. Предел переменной величины. Определение предела на языке последовательностей.
2. Исследование функций методами анализа. Интервалы монотонного изменения функции.
3. Найти участки возрастания, убывания и точки экстремума функции
 $f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$.

Преподаватель _____ М.Б. Давыдова
подпись *расшифровка подписи*

Пример контрольно-измерительного материала №2
по учебной дисциплине Б1.О.16 Математический анализ

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
математического анализа

_____ А.Д. Баев
подпись, расшифровка подписи

___. __. 20__

Направление подготовки / специальность	30.05.02 Медицинская биофизика
Дисциплина	Б1.О.16 Математический анализ
Курс	1
Форма обучения	очное
Вид аттестации	промежуточная
Вид контроля	экзамен

Билет 1

1. Системы линейных алгебраических уравнений, основные понятия и определения.
2. Решение простейших дифференциальных уравнений первого порядка, приводящихся к уравнениям с разделяющимися переменными.
3. Решить дифференциальное уравнение: $xy' - y = x^2$

Преподаватель _____
подпись

М.Б. Давыдова
расшифровка подписи

19.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины, осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущая аттестация проводится в формах контрольных и лабораторных работ. Критерии оценивания приведены выше.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и практическое задание, позволяющее оценить степень сформированности умений и навыков.

При оценивании используются качественные шкалы оценок. Критерии оценивания приведены выше.

Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

Перечень заданий для проверки сформированности компетенции

1. Пользуясь правилом Лопиталья, найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$, указав один верный ответ:

а) 2

б) 0

в) 0,5

г) бесконечность

д) 3

2. Найти интервал монотонного убывания функции $f(x) = x^3 - 3x^2$

а) (0,3)

б) (0,2)

в) (-1,1)

г) (-2,2)

д) (0,-1)

2) ситуационные задания с развернутым ответом сложные:

Известно, что скорость размножения бактерий, вызывающих инфекционное заболевание, в 3 раза выше, чем количество бактерий в данный момент времени t . Найти зависимость изменения количества бактерий от времени.

Решение: Обозначим количество бактерий, имеющих в данный момент, через x . Тогда $\frac{\partial x}{\partial t} = kx$,

где $k = 3$ - коэффициент пропорциональности.

В этом уравнении разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\frac{dx}{x} = k dt, \int \frac{dx}{x} = k \int dt, \ln x = kt + \ln C;$$

$$\ln x = \ln e^{kt} + \ln C.$$

Потенцируем последнее выражение:

$$x = Ce^{kt}.$$

Полагая, что при $t=0$ $x=x_0$, получим $C=x_0$. Следовательно,

$$x = x_0 e^{kt}.$$

Так как $k=3$, окончательно получаем:

Ответ: $x = x_0 e^{3t}$

Решение: Обозначим количество бактерий, имеющих в данный момент, через x .

Тогда $\frac{dx}{dt} = kx$, где $k = 3$ - коэффициент пропорциональности.

В этом уравнении разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\frac{dx}{x} = k dt, \int \frac{dx}{x} = k \int dt, \ln x = kt + \ln C;$$

$$\ln x = \ln e^{kt} + \ln C.$$

Потенцируем последнее выражение:

$$x = Ce^{kt}.$$

Полагая, что при $t=0$ $x=x_0$, получим $C=x_0$. Следовательно,

$$x = x_0 e^{kt}.$$

Так как $k=3$, окончательно получаем

Ответ: $x = x_0 e^{3t}$

3) ситуационные с развернутым ответом простые:

Температура тела задана законом $y = x^2 + 3x - 1$. Найти скорость изменения температуры в момент времени 2 сек.

Решение:

Скорость изменения температуры есть производная функции:

$$y' = 2x + 3,$$

далее, в момент времени $x=2$ имеем:

$$y'(2) = 2x + 3 = 7 \quad y'(2) = 2x + 3 = 7$$

Ответ: 7

4) задания, требующего короткого ответа:

5. Значение частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ в точке $(-1,1)$ от функции $z=7xy+5x-4y+10$

равно...

Решение: найдем частную производную $\frac{\partial z}{\partial x} = 7y + 5;$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(-1,1) = -2$$

Ответ: -2

Структура, критерии и шкалы оценивания:

Для оценивания выполнения заданий используется балльная шкала:

1) закрытые задания (тестовые, средний уровень сложности):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ, в том числе частично.

2) открытые задания (тестовые, повышенный уровень сложности):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ, в том числе частично.

3) открытые задания (мини-кейсы, средний уровень сложности):

- 5 баллов – задание выполнено верно (получен правильный ответ, обоснован (аргументирован) ход выполнения (при необходимости));

- 2 балла – выполнение задания содержит незначительные ошибки, но приведен правильный ход рассуждений, или получен верный ответ, но отсутствует обоснование хода его выполнения (если оно было необходимым), или задание выполнено не полностью, но получены промежуточные (частичные) результаты, отражающие правильность хода выполнения задания, или, в случае если задание состоит из выполнения нескольких подзаданий, 50% которых выполнено верно;
- 0 баллов – задание не выполнено или выполнено неверно (ход выполнения ошибочен или содержит грубые ошибки, значительно влияющие на дальнейшее его изучение).